



TITLE:

二成分混合流体における進行波対流の分岐 (臨界現象と微分方程式の解の分岐)

AUTHOR(S):

八幡, 英雄

CITATION:

八幡, 英雄. 二成分混合流体における進行波対流の分岐 (臨界現象と微分方程式の解の分岐). 数理解析研究所講究録 2001, 1231: 21-33

ISSUE DATE:

2001-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41467>

RIGHT:

二成分混合流体における進行波対流の分岐

広島大理 八幡英雄 (Hideo YAHATA)

二枚の水平平行平板間に二成分混合流体を容れ、底面より加熱したとき発生する Rayleigh-Bénard(RB) 対流を考える。この系は、平行平板間の温度差 ΔT 、流体の性質を表す Prandtl 数 Pr 、溶液の種類、容器の形状・アスペクト比によって、きわめて多様な空間的構造と時間的挙動を示す。流体の熱流束 \mathbf{q} 、成分 1 の質量流束 \mathbf{j}_1 は、温度場、成分 1 の重量分率をそれぞれ T 、 x_1 とすると、

$$\mathbf{q} = -\rho_0 C_p \kappa \nabla T - \rho_0 C_p \gamma_1 \nabla x_1 \quad (1)$$

$$\mathbf{j}_1 = -\rho_0 \gamma_2 \nabla T - \rho_0 D \nabla x_1 \quad (2)$$

と書かれる。ここで、 ρ_0 、 C_p 、 κ 、 D はそれぞれ溶液の平均密度、定圧比熱、温度伝導率、拡散係数を表す。一方、係数 γ_1 、 γ_2 に比例する項は、それぞれ Dufour 効果、Soret 効果による寄与を与える。流体の速度を \mathbf{u} 、圧力を P とすると運動方程式は、 z 軸の正の向きを重力と反対向きにとると、Boussinesq 近似の範囲で、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{P}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(x_1 - x_{10})] g \mathbf{e}_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \gamma_1 \nabla^2 x_1 \quad (4)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla x_1 = \gamma_2 \nabla^2 T + D \nabla^2 x_1 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

の形をとる。ここで、 ν は動粘性率、 g は重力加速度を表し、温度、溶質濃度による溶液の膨張係数をそれぞれ α 、 β で表わす。液体では Dufour 効果による項の寄与は小さいので、以下係数 γ_1 に比例する項は落とす。

流体は厚さ d 離れた二枚の平行な水平平板間に閉じ込められ、水平方向に無限に広がっている場合を考え、平板上で流速は固定的 (rigid)、温度場は等温的、濃度場は非透過的

$$j_{1z} = -\rho_0 D \frac{\partial}{\partial z} \left(x_1 + \frac{\gamma_2 T}{D} \right) = 0 \quad (7)$$

境界条件を満たしているとする。式 (7) により、場 $\eta = x_1 + \frac{\gamma_2 T}{D}$ は上下平板で Neumann 境界条件を満たすので、以下 x_1 の代わりに η を用いて方程式を解く。底面、蓋面の位置を $z = -d/2, d/2$ とし、各面の一様温度を $T = T_1, T_2$ とする。対流がない定常状態 ($\mathbf{u} = 0, \partial_t = 0$) における温度場 $T^s(z)$ 、濃度場 $x_1^s(z) = \eta^s(z) - \frac{\gamma_2 T^s(z)}{D}$ 、圧力場 $P^s(z)$ を決める方程式は、

$$0 = -\nabla \frac{P^s}{\rho_0} - [1 - \bar{\alpha}(T^s - T_0) + \beta(\eta^s - \eta_0)] g \mathbf{e}_z \quad (8)$$

$$0 = \nabla^2 T^s \quad (9)$$

$$0 = \nabla^2 \eta^s \quad (10)$$

となる。式 (8) – (10) を解くと、定常密度場を $\rho^s(z)$ として

$$T^s(z) = T_0 - \frac{\Delta T}{d} z, \quad \eta^s(z) = x_1^s(z) + \frac{\gamma_2 T^s(z)}{D} = \eta_0, \quad \rho^s(z) = \rho_0 (1 - \bar{\alpha}(T^s(z) - T_0)) \quad (11)$$

となり、圧力 $P^s(z)$ は $\rho^s(z)$ の表式を用いて式 (8) により定まる。ここで、 $T_0 = (T_1 + T_2)/2$, $\Delta T = T_1 - T_2$, $\bar{\alpha} = \alpha(1 + S)$ で、 $S = \beta\gamma_2/\alpha D$ は分離比とよばれる。

つぎに、この convection-free state (11) に対する乱れの方程式を導くために、 $P = P^s + \delta p$, $T = T^s + \delta T$, $\eta = \eta^s + \delta \eta$ を、式 (3) – (6) に代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{\delta p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + [\bar{\alpha} \delta T - \beta \delta \eta] g \mathbf{e}_z. \quad (12)$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T = \frac{\Delta T}{d} u_z + \kappa \nabla^2 \delta T. \quad (13)$$

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \eta = \frac{\gamma_2 \kappa}{D} \nabla^2 \delta T + D \nabla^2 \delta \eta. \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (15)$$

となる。さらにこの方程式を無次元化するために、変換 $t \rightarrow (d^2/\nu)t$, $\mathbf{u} \rightarrow (\nu/d)\mathbf{u}$, $\delta T \rightarrow (\Delta T)\delta T$, $\delta\eta \rightarrow (\Delta T)(\gamma_2/D)\delta\eta$ を行くと、無次元化された運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{\delta p}{\rho_0} + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Ra}{Pr} [(1+S)\delta T - S\delta\eta] \mathbf{e}_z. \quad (16)$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T = u_z + \frac{1}{Pr} \nabla^2 \delta T. \quad (17)$$

$$\frac{\partial \delta\eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta\eta = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \delta T + \frac{L}{Pr} \nabla^2 \delta\eta. \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (19)$$

を得る。ここで、方程式系は4個の無次元パラメータ: Rayleigh 数 $Ra = \alpha g d^3 \Delta T / \kappa \nu$, Prandtl 数 $Pr = \nu / \kappa$, Lewis 数 $L = D / \kappa$, 分離比 S によって特徴づけられている。境界条件は、上下水平境界面 ($z = \pm 1/2$) で、 $\mathbf{u} = \partial_z u_z = \delta T = \partial_z \delta\eta = 0$ で与えられる。以下、対流の空間構造は周期的ロール構造をとると仮定し、問題をロール軸に垂直な平面内の2次元系の運動として扱う。

この系の Rayleigh-Bénard 対流は、パラメータの設定によって多様な空間的構造・時間的挙動を示すが、ここでは、分離比 S が負の値をもつ場合に現れる、2次元ロール状の対流胞がロールの軸に垂直方向に時間とともに平行移動する進行波対流 (Traveling-Wave or TW convection) 状態について考察する。代表的な系として例えば、8 wt-% ethanol in water は、27.53°C で $Pr = 9.16$, $L = -0.008$, $S = -0.257$ をとるので¹⁾、以下 $Pr = 10$, $L = 0.01$, $S = -0.25$ の系を扱うことにする。この系において、十分大きな Ra の値で2次元ロール対流は、ロールの位置の時間的移動はない定常状態 (Stationary Overturning Convection or SOC state) にあるが、 Ra の値を降下させると、或る $r = Ra / (Ra)_c = r^*$ (ここで、 $(Ra)_c = 1708$) で、SOC から TW 状態への遷移が起る。 Ra を降下させていくにつれ、ロールの移動速度 $V_p = \omega / k$ (ここで、 ω は角振動数、 k はロールの波数) は次第に増加し、或る $r = r_{TW}^*$ で saddle-node 分岐によって対流状態は不安定になり熱伝導状態に遷移する。このように、熱伝導状態と対流状態の間の遷移が subcritical であるのが、この系の特徴の

一つである。この系は Lücke のグループによって、MAC 法による simulation と Galerkin 法によるモード振幅方程式の定常解探索の方法を用いて精力的に研究されてきた。ここでは、対流状態の安定性解析の観点からこの問題を取り扱った結果を報告し、彼らの結果との比較を試みる。

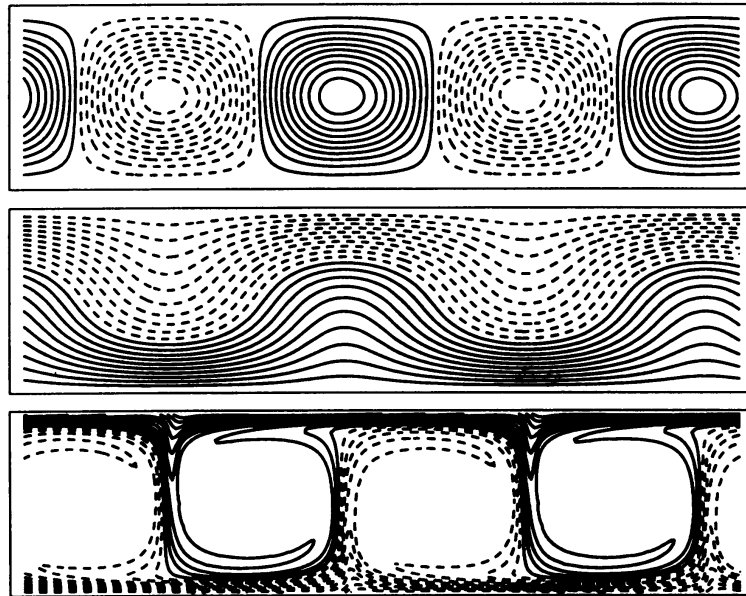


図 1: TW 状態における流体場の空間構造 ($r = 1.3$, $Pr = 10$, $L = 0.01$, $S = -0.25$)。第 1 行は、速度成分 u_z 、第 2 行は、温度場 T 、第 3 行は濃度場 x_1 の等高線図。MAC simulation (48×96 meshes)。

この系の遷移をしらべるために、まず MAC 法による simulation を行った。2 次元ロールの軸方向には一様と仮定して、系は 2 次元的で $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ とし、境界条件は上下壁では上記条件を課し、水平方向には周期的境界条件を課した。高さ 1、水平幅 2 の simulation box を、それぞれ 48, 96 個の等方格子に分け、時間刻み幅は $\tau = 0.5 \times 10^{-4} [d^2/\nu]$ にとった。2-ロール状態を初期状態として $r = 2$ の SOC 状態を simulation によって実現させ、ここから出発して Ra をステップ状に降下させて、そこでの Ra の各値における流体方程式の時間発展を追った。図 1.2 はそれぞれ $r = 1.3, 1.4$ における TW, SOC 状態における各場の等

高線図を示す。

次に、この問題をスペクトル法によって扱う。まず、流れ関数 Φ を導入して、速度を $u_x = \partial_z \Phi, u_z = -\partial_x \Phi$ と表わすと、運動方程式は、

$$-\frac{\partial \nabla^2 \Phi}{\partial t} = -\nabla^4 \Phi + \frac{Ra}{Pr} \left[(1+S) \frac{\partial \delta T}{\partial x} - S \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial (\nabla^2 \Phi, \Phi)}{\partial (x, z)} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{Pr} \nabla^2 \delta T + \frac{\partial (\Phi, \delta T)}{\partial (x, z)} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \delta T + \frac{L}{Pr} \nabla^2 \delta \eta + \frac{\partial (\Phi, \delta \eta)}{\partial (x, z)} \quad (22)$$

となる。各場を、

$$\Phi(x, z, t) = \sum_{m=-M+1}^{m=M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{mn}(t) \exp(imkx) \varphi_n(z) \quad (23)$$

$$\delta T(x, z, t) = \sum_{m=-M+1}^{m=M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \theta_{mn}(t) \exp(imkx) \chi_n(z) \quad (24)$$

$$\delta \eta(x, z, t) = \sum_{m=-M+1}^{m=M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \eta_{mn}(t) \exp(imkx) \psi_n(z) \quad (25)$$

のように展開する。ここで、 $\varphi_n(z), \chi_n(z), \psi_n(z)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) は、境界条件

$$\varphi_n \left(\pm \frac{1}{2} \right) = \partial_z \varphi_n \left(\pm \frac{1}{2} \right) = \chi_n \left(\pm \frac{1}{2} \right) = \partial_z \psi_n \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (26)$$

および内積 $(f, g) = \int_{-0.5}^{0.5} f(z)g(z)dz$ にたいして正規直交条件

$$(\varphi_m, \varphi_n) = (\chi_m, \chi_n) = (\psi_m, \psi_n) = \delta_{m,n} \quad (27)$$

を満たすように Chebyshev 多項式を用いて構成された直交多項式系である⁷⁾。

図1、2に示した TW および SOC 状態の各場の等高線図をみると、速度場、温度場は両状態で同じ構造であるが、濃度場はその構造が少し相異なっている。しかしながら、すべての場は $\lambda = 2\pi/k$ をロール周期の波長として Lücke のいう Mirror-glide symmetry:

$$\Phi(x, z, t) = -\Phi\left(x + \frac{\lambda}{2}, -z, t\right) \quad (28)$$

$$T(x, z, t) = -T\left(x + \frac{\lambda}{2}, -z, t\right) \quad (29)$$

$$x_1(x, z, t) = -x_1\left(x + \frac{\lambda}{2}, -z, t\right) \quad (30)$$

を満たしているから、上記展開 (23) において次数の低い順から並べた直交多項式の添字が偶数、奇数のときそれぞれ偶関数、奇関数であることを考慮すると

$$\exp(i(2p-1)kx)\varphi_{2q}(z), \quad \exp(i(2p)kx)\varphi_{2q-1}(z), \quad (p=1,2,\dots; q=1,2,\dots)$$

の形の項のみを含めればよいので (展開 (24),(25) も同様)、展開の総項数は半分になる。

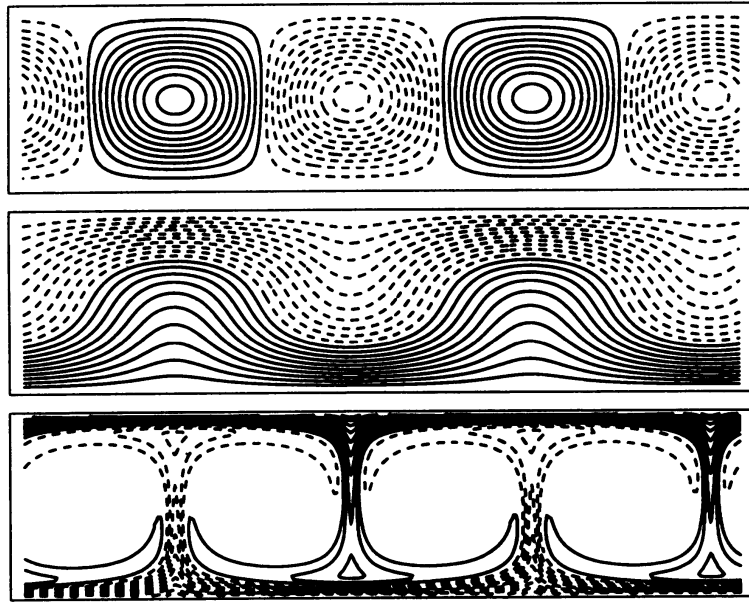


図 2: SOC 状態における流体場の空間構造 ($r = 1.4$, $Pr = 10$, $L = 0.01$, $S = -0.25$)。第 1 行は、速度成分 u_z 、第 2 行は、温度場 T 、第 3 行は濃度場 x_1 の等高線図。MAC simulation (48×96 meshes)。

展開 (23)-(25) を運動方程式 (20)-(22) に代入して Galerkin 法により、モード振幅 $\mathbf{x} = (\gamma_{mn}, \theta_{mn}, \eta_{mn})$ の時間発展を支配する力学系

$$\partial_t \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (31)$$

を得る。ここで、非線形項の計算は FFT を用いて実座標空間での各場の値を計算し、これに IFFT を施すことにより行った。この際、FFT のデータ数を $2M_0$ とするとき、Orszag の $\frac{3}{2}$ -rule に留意して $M_0 > \frac{3}{2}M$ のように選ぶ必要がある。式 (31) を用いた spectral simulation

は、モード数 $M = 33$, $2M_0 = 128$, $N = 16$ の場合に行い、実際 SOC 状態と TW 状態が実現することを確認した。図 3 に TW 状態の各場の等高線図を示す。

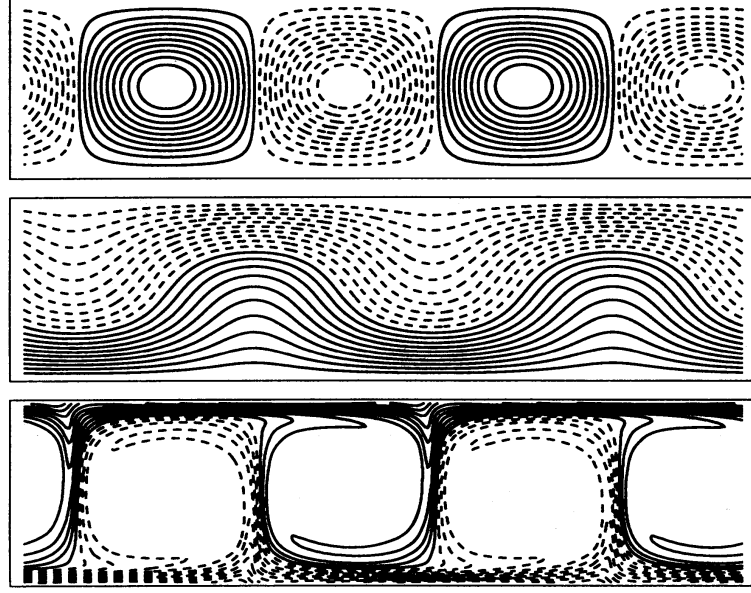


図 3: TW 状態における流体場の空間構造 ($r = 1.3$, $Pr = 10$, $L = 0.01$, $S = -0.25$)。第 1 行は、流れ関数 Φ 、第 2 行は、温度場 T 、第 3 行は濃度場 x_1 の等高線図。Spectral simulation($M = 33$, $N = 16$) の結果。

次に平行移動解を定常状態の解として求めるために、 V_p を平行移動速度として各場の関数形が

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x - V_p t, z), \quad \delta T(x, z, t) = \delta T(x - V_p t, z), \quad \delta \eta(x, z, t) = \delta \eta(x - V_p t, z) \quad (32)$$

であると仮定すると、運動方程式 (20)-(22) は $\xi = x - V_p t$, z を独立変数とする方程式

$$V_p \frac{\partial \nabla^2 \Phi}{\partial \xi} = -\nabla^4 \Phi + \frac{Ra}{Pr} \left[(1 + S) \frac{\partial \delta T}{\partial \xi} - S \frac{\partial \delta \eta}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial (\nabla^2 \Phi, \Phi)}{\partial (\xi, z)} \quad (33)$$

$$-V_p \frac{\partial \delta T}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{1}{Pr} \nabla^2 \delta T + \frac{\partial (\Phi, \delta T)}{\partial (\xi, z)} \quad (34)$$

$$-V_p \frac{\partial \delta \eta}{\partial \xi} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \delta T + \frac{L}{Pr} \nabla^2 \delta \eta + \frac{\partial (\Phi, \delta \eta)}{\partial (\xi, z)} \quad (35)$$

となる。ここで各場を (23)-(25) と同様に

$$\Phi(\xi, z) = \sum_{m=-M+1}^{m=M-1} \sum_{n=0}^{N-1} C_{mn} \exp(ik\xi) \varphi_n(z) \quad (36)$$

$$\delta T(\xi, z) = \sum_{m=-M+1}^{m=M-1} \sum_{n=0}^{N-1} T_{mn} \exp(ik\xi) \chi_n(z) \quad (37)$$

$$\delta \eta(\xi, z) = \sum_{m=-M+1}^{m=M-1} \sum_{n=0}^{N-1} E_{mn} \exp(ik\xi) \psi_n(z) \quad (38)$$

のように展開する。これを (33)-(35) に代入して Galerkin 法を用いれば、定常解としてモード振幅を決定する方程式をうる。

しかしながらこのままでは未知数 V_p が 1 個増えて方程式が 1 個足りないが、系が x 方向の並進移動に対してもつ不変性 (或は原点の選択に関する不定性) を利用してこの不足を除く。展開 (36)-(38) において、 δ を定数として変換: $\xi \rightarrow \xi - \delta$ を行うとき、同時に各振幅係数の変換:

$$C_{mn} \rightarrow C_{mn} \exp(ik\delta) \quad (39)$$

$$T_{mn} \rightarrow T_{mn} \exp(ik\delta) \quad (40)$$

$$E_{mn} \rightarrow E_{mn} \exp(ik\delta) \quad (41)$$

を行うと各場の変数 $\Phi(\xi, z)$, $\delta T(\xi, z)$, $\delta \eta(\xi, z)$ は不変に保たれる。

ここでは、 $\Im(C_{1,0} \exp(-ik\delta)) = 0$ になるように、すなわち $\delta = \arctan(\Im(C_{1,0})/\Re(C_{1,0}))$ と選んで、 $\Phi(\xi, z)$ の主要モード振幅 $m = 1, n = 0$ の虚数部分が 0 になるように位相を固定する。 $X = (C_{mn}, T_{mn}, E_{mn})$ とかくとき、 \tilde{X} を X から成分 $\Im(C_{1,0})$ を除いたベクトルとすると、(33)-(35) より Galerkin 法により $\hat{X} = \tilde{X} \cup \{V_p\}$ を未知変数とする非線形振幅方程式

$$F(\hat{X}) = 0 \quad (42)$$

が導かれる。これによって、SOC および TW 状態を定常状態の解として Newton 法により求めることができる。以下に示す定常解は $M = 33$, $N = 16$ の場合の数値結果である。

r^*	方法	文献
1.226	純粋流体よりの摂動	BPS ²⁾
1.65	2D MAC simulation(20 × 40 meshes)	BLKS ^{3,4)}
1.826	円環体容器内の流体実験	OYSK ¹⁾
1.495	Galerkin 系の定常解	HL ⁵⁾
1.45	2D-MAC simulation(40 × 80 meshes)	HL ⁵⁾
1.427	Galerkin 系の定常解	BL ⁶⁾
1.394	Galerkin 系 (42) の定常解 ($M = 33, N = 16$)	Present
1.396	Galerkin 系 (42) の定常解 ($M = 40, N = 24$)	Present

表 1: r^* の評価。 $Pr = 10, S = -0.25, L = 0.01$

図 4 に代表的なモード振幅 $\Re(C_{1,0})$ によって対流振幅が Rayleigh 数の変化に伴いどのように変化するか示す。 r の大きいところでは SOC 状態が安定で、そこから徐々に減少させると、 $r = r^* \simeq 1.3944$ で TW 状態への遷移が起る。さらに r を減少させて行くと TW 状態は $r = r_s^{TW} \simeq 1.2085$ で saddle-node 不安定を起して消滅する。なお、SOC 解は $r < r^*$ でも方程式 (42) の定常解として求めることができるが、この不安定解も $r = r_s^{SOC} \simeq 1.08137$ で saddle-node 遷移を起し崩壊消滅して熱伝導状態にもどる。

図 5 はこれを各定常状態の安定性を変分方程式の最大固有値を計算することにより示す。次に、TW 状態における対流ロールの角振動数 ω および移動速度 V_p を (42) の定常解として求めた結果を、Rayleigh 数にたいしてプロットした図を図 6 に示す。 Ra の降下に伴って、移動速度は急激に増加することがわかる。図 6 には同じ打ち切り項数 ($M = 33, N = 16$) で計算した spectral simulation の結果より求めた ω も記入してあるが、これが Newton 法による定常解の結果と極めてよく一致していることは、我々がここで用いた計算法の妥当性を示していると思われる。なお、MAC simulation の結果も図 6 に何点か記入してあるが、上記 2 つの結果とかなりよい一致を示している。

表1に r^* の評価について、これまでに得られている結果をまとめ、今回得られた結果と比較した。純粋流体の対流状態からパラメータ S による摂動計算による結果は、 $r^* = 1.226^{2)}$ 、 $20 \times 40 (40 \times 80)$ 格子MAC法によるsimulation結果は、 $r^* = 1.650^{3)} (1.45^{5)})$ 、8 wt-% ethanol in water at 28°C における実験結果は、 $r^* = 1.826^{1)}$ を与える。Hollinger-Lücke, Büchel-Lücke は、本稿に述べたのとは異なった方法で Galerkin 系を構成し、その定常解を求めている^{5,6)}。これらは少しずつ異なった条件下で得られた結果であるが、これらの差が単にそれだけに起因するのかは否かは明らかでない。一般に $\text{TW} \rightarrow \text{SOC}$ 転移点近傍では対流胞の移動速度は非常に遅くなるのでsimulationによって r^* の値を求めるのは困難になる。他方、角振動数 ω 、位相速度 V_p は大略同程度の値を与える。

本稿では、数理研の研究会「非線形波動現象のメカニズムと数理」(2000年12月)で同様な題目で発表した後に得られた結果を述べた⁸⁾。

参考文献

- 1) D. R. Ohlsen, S. Y. Yamamoto, C. M. Surko, and P. Kolodner, Phys. Rev. Lett. **65**(1990), 1431.
- 2) D. Bensimon, A. Pumir and B. I. Shraiman, J. de Physique **50**(1989), 3089.
- 3) W. Barten, M. Lücke, and M. Kamps, Phys. Rev. Lett. **63**(1989), 376.
- 4) W. Barten, M. Lücke, M. Kamps, and R. Schmitz, Phys. Rev. **E51**(1995), 5636.
- 5) St. Hollinger and M. Lücke, Phys. Rev. **E52**(1995), 642.
- 6) P. Büchel and M. Lücke, Phys. Rev. **E61**(2000), 3793.
- 7) H. Yahata, J. Phys. Soc. Jpn. **68**(1999), 445.
- 8) 八幡英雄: 数理研講究録 **1209**(2001), 155.

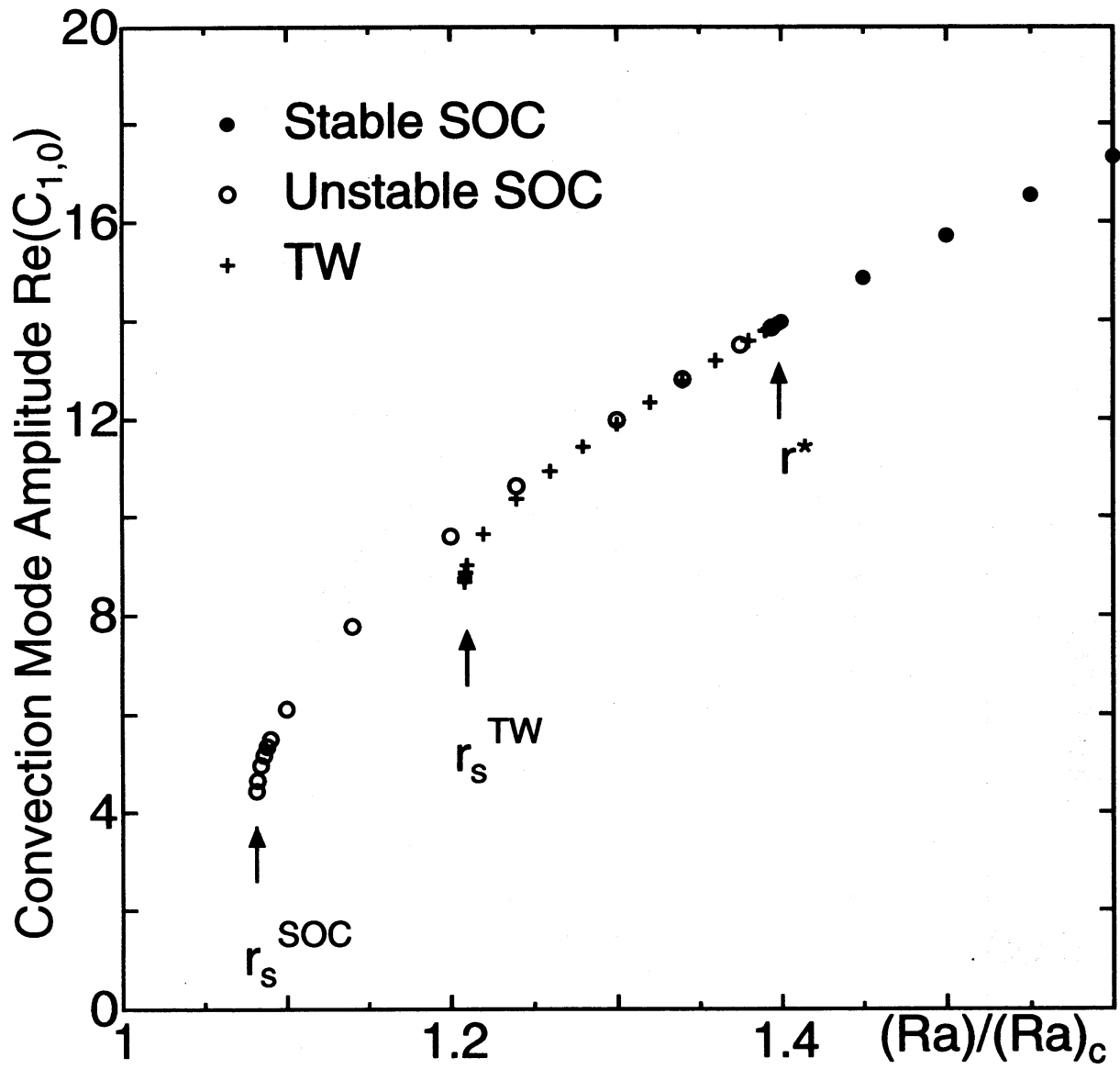


図 4: 対流モード振幅の Rayleigh 数依存性。 r^* は、SOC-TW 状態間の遷移点、 r_s^{TW} は TW 状態の saddle-node 遷移点、 r_s^{SOC} は不安定 SOC 状態の saddle-node 遷移点。

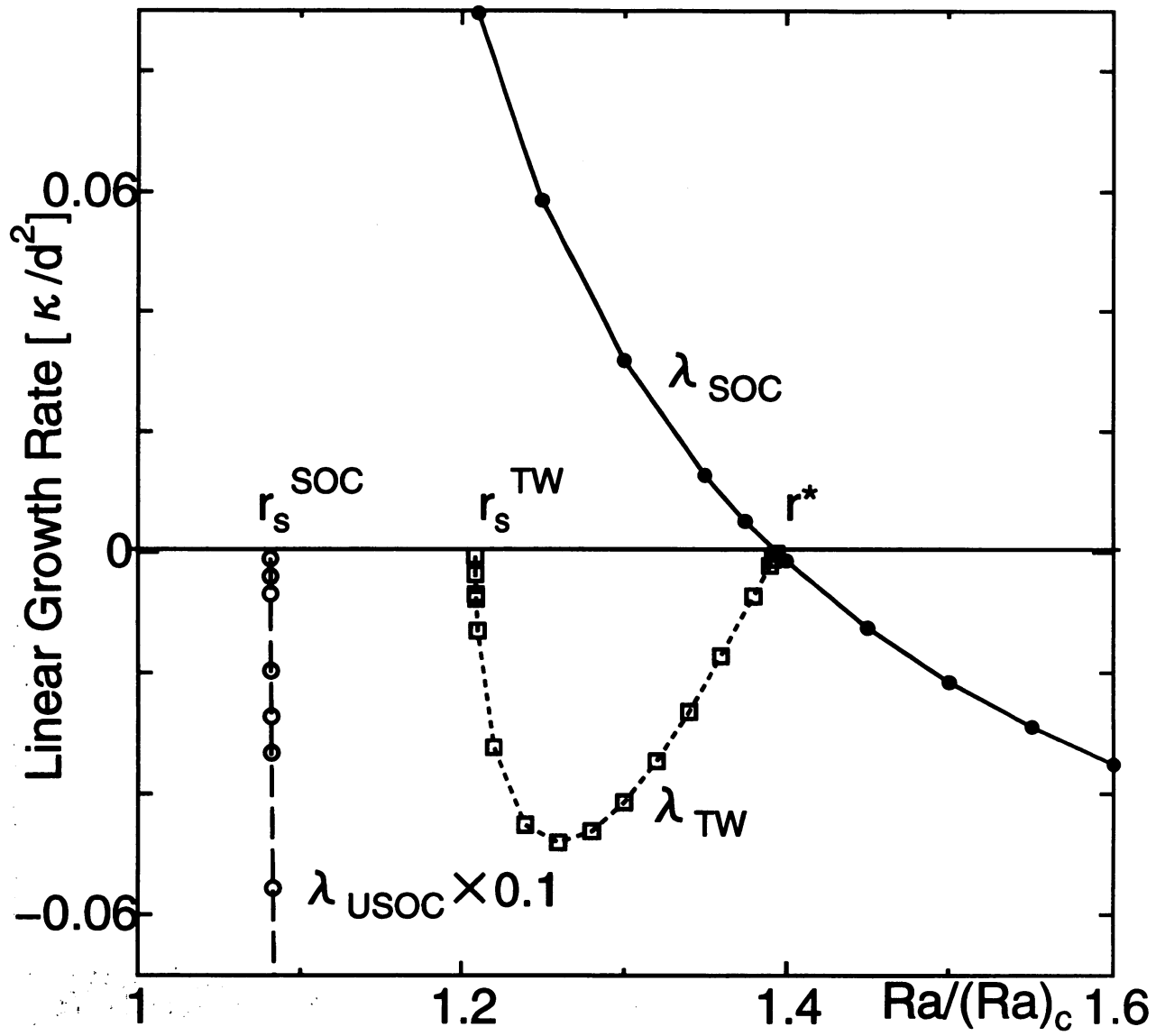


図 5: SOC および TW 状態における線形成長率。 λ_{USOC} は不安定 SOC 状態における least stable mode で、 r_s^{SOC} において saddle-node 不安定を引き起こす。

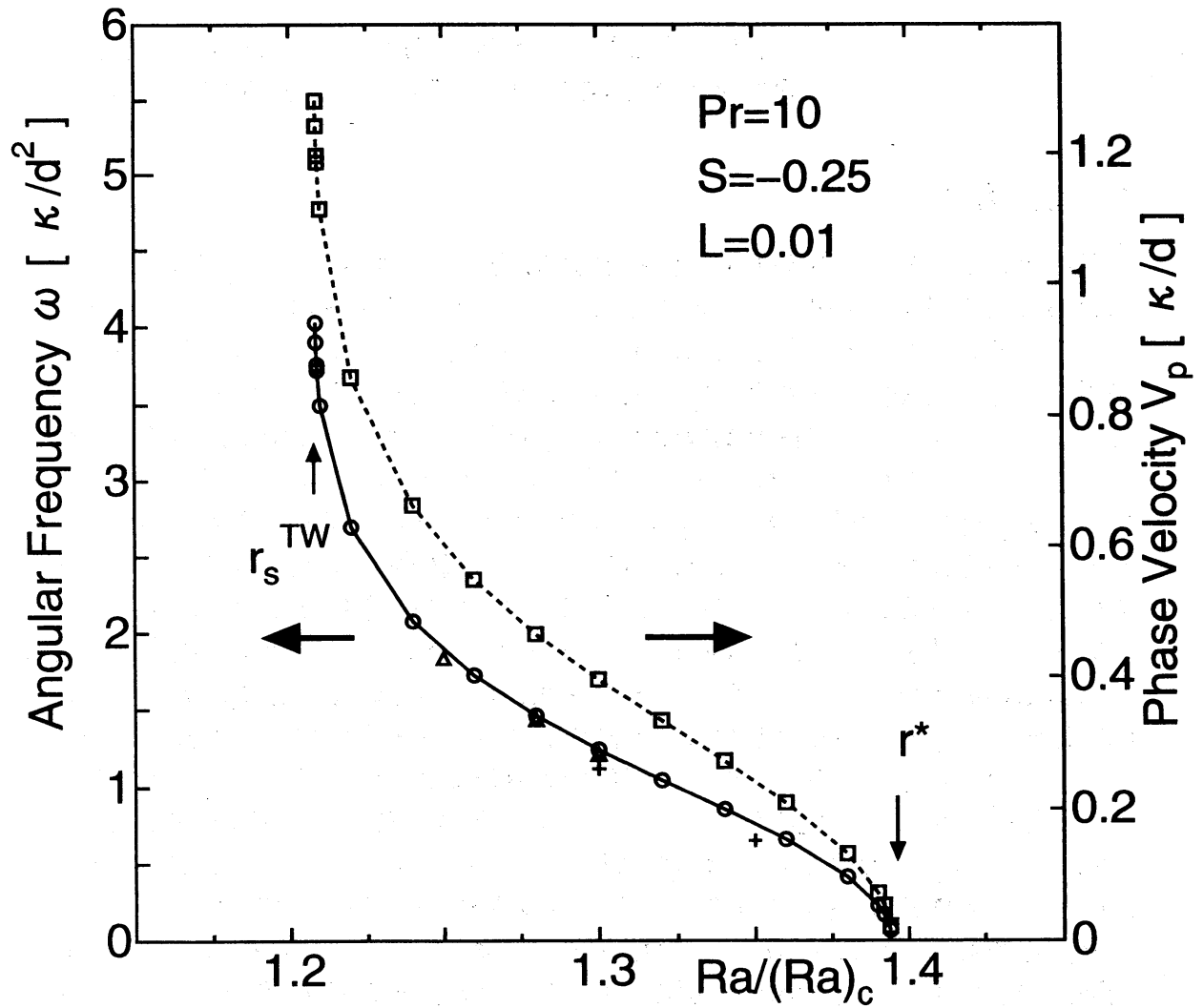


図 6: TW 状態における対流細胞の移動速度を特徴づける角振動数 ω 、位相速度 $V_p = \omega/k$ Rayleigh 数依存性。ここで、周期的ロールの波数は $k = \pi[d^{-1}]$ である。○は、(42) の定常解の結果 ($M = 33, N = 16$)、△は、(31) の spectral simulation ($M = 33, N = 16$) の結果、+ は MAC simulation (48×96 meshes) の結果。